13/10/16

▶ **Άσκηση**: $x^2y' + 2xy = 1$, $x>0$.

i) $\exists \lim y(x) = +\infty$ ?

ii) $y_0(2) = 2y_0(1)$

Λύση

$$(x^2y)' = 1$$

$$x^2y = c+x$$

$$y = \frac{c+x}{x^2}, \quad x>0$$

όπου $\lim y(x) = 0$

& $y_0(2) = \frac{c+2}{4} = 2\frac{c+1}{1} = 2y_0(1)$

$\Updownarrow$

$-6/7$

Άρα $y(x) = \frac{-6/7+x}{x^2}$, $x>0$

▶ **Άσκηση**: $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$. Να ο $y(k\pi) - y(0) = ?$

Λύση

$$y(x) = e^{-\int \cos x\,dx}\left[c + \int e^{-\sin x} e^{\int \cos x\,dx} dx\right]$$

$$= e^{-\sin x}\left[c + \int e^{-\sin x} e^{\sin x} dx\right] = e^{-\sin x}\left[c+x\right]$$

Άρα, $y(x) = (c+x)e^{-\sin x}$

$$y(k\pi) - y(0) = (c+k\pi)e^0 - ce^0 = c + k\pi - c = k\pi$$

Επομένως, $y(k\pi) = y(0) + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\lim y(x) = +\infty$ {εφόσον είναι μονότονη και φραγμένη}, δεν αποδεικνύεται από

▶ **Άσκηση**: $xy' - y\log y = x^2y$.

Έχουμε: $\frac{xy' - y\log y}{x^2y} = 1$

$$\frac{x\frac{y'}{y} - \log y}{x^2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{\log y}{x}\right)' = 1 \Rightarrow \frac{\log y}{x} = x + c \Rightarrow$$

$\Rightarrow \log y = (x+c)x$, Άρα $\boxed{y = e^{x(c+x)}}$

**Σπίτι**

→ $y = e^{x(c+x)}$ & $y = e^{|x|(c+|x|)}$ Περιγράφουν τις ίδιες λύσεις συναρτήσεις;

## ● $\boxed{\text{Εξίσωση Bernoulli}}$

Είναι της μορφής $y' + a(x)y = b(x)y^r$, $r \neq 1, 0$

**Διαδικασία**: θέτουμε $\boxed{z = y^{1-r}}$

Είναι:

$z' = (1-r)y^{-r}y'$

Η εξίσωση γράφεται ως: $y^{-r}y' + a(x)\overset{y^{1-r}}{yy^{-r}} = b(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{z'}{1-r} + a(x)z = b(x)}$$

▶ **Π.χ** ⑤ (από βιβλίο) σελ. 33 $y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{2y}$, $y(-1) = 2$, $x<0$

**Λύση**

$y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{2}y^{-1}$, $r = -1 \leadsto z = y^{1-(-1)} = y^2$

$z' = 2yy'$

$$\left.\begin{array}{l} yy' - \frac{1}{x}y^2 = -\frac{1}{2} \\ \frac{z'}{z} - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z' - \frac{2}{x}z = -1}$$

Άρα, έχουμε $z(x) = cx^2 + x \leadsto y(x) = \pm\sqrt{cx^2+x}$, $x<0$

Επομένως, $y(-1) = 2 \leadsto 2 = \sqrt{c-1} \Rightarrow 4 = c-1 \Rightarrow \boxed{c=5}$

Άρα, $y(x) = \sqrt{5x^2+x}$, $x \in (-\infty, -1/5)$

[γιατί $5x^2+x \geq 0 \Rightarrow x(5x+1) \geq 0$ & $x<0$]

▶ **Άσκηση** $\underbrace{(x-1)}_{t=x-1}y' - 3y = (x-1)^5$ , $y(-1) = 16$ , $\boxed{x<1}$

**Λύση**

για $t = x-1$ : $\boxed{ty' - 3y = t^5}$ , $y(-2) = 16$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

$$\boxed{ty' - 3y = t^5} \rightsquigarrow y(t) = ct^3 + \frac{t^5}{2}$$

$$y(x) = c(x-1)^3 + \frac{(x-1)}{2} \overset{\text{βρίσκω}}{\rightsquigarrow} \boxed{c}$$

$$y(-1) = 16$$

▶ **Άσκηση**: Με χρήση του μετ/σμου $z = tgy$, να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{1}{\cos^2 y}y' + x\,tgy + x\,tg^3y = 0 \ , \ y(0) = \frac{\pi}{4}$$

Να δο ότι $\lim_{\to +\infty} y(x) = 0$

**Λύση**

Είναι $z' = \frac{1}{\cos^2 y}y'$ κ η εξίσωση γράφεται: $\boxed{z' + xz + xz^3 = 0}$ $z(0) = 1$

Είναι εξ. Bernoulli

$w = z^{1-3} \Rightarrow w = z^{-2} \Rightarrow \boxed{w' = -2z^{-3}z'}$

Η εξίσωση γράφεται:

$$z'z^{-3} + xz^{-2} + x = 0$$

$$-\frac{1}{2}w' + xw + x = 0 \Rightarrow \boxed{w' - 2xw - 2x = 0} \text{ εξ. 1ης τάξης}$$

$\rightsquigarrow \boxed{w(x) = ce^{x^2} - 1}$

$\Rightarrow z(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{ce^{x^2}-1}}$ , $tg\,y(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{ce^{x^2}-1}} \Rightarrow y(x) = Arctg\left(\pm\frac{1}{\sqrt{ce^{x^2}-1}}\right)$

& $y(0) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{c=2}$

Άρα έπεται ότι: $y(x) = Arctg\frac{1}{\sqrt{2e^{x^2}-1}}$ ↙ Να βρω ΠΟ

- **Εφαρμογή Εξίσωσης Bernoulli** (Λογιστική Εξίσωση)

$\boxed{y' = ay - by^2}$ (logistic eq) , $a, b > 0$

$r = 2 \Rightarrow z = y^{1-2} \Rightarrow z = \frac{1}{y}$

$z' = -\frac{y'}{y^2}$

$\leadsto y^{-2} y' = \alpha \frac{1}{y} - b$

$-z' = \alpha z - b$

$z' + \alpha z = b$

$z(x) = e^{-\int_0^x \alpha ds} \left[ z(0) + \int_0^x b e^{\int_0^s \alpha dy} ds \right]$

$= e^{-\alpha x} \left[ z(0) + b \int_0^x e^{\alpha s} ds \right]$

$= e^{-\alpha x} \left[ z(0) + b \frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha} \right]$

δηλ. $z(x) = z(0) e^{-\alpha x} + \frac{b}{\alpha} \left[ 1 - e^{-\alpha x} \right]$

$\xrightarrow{z = \frac{1}{y}} y(x) = \frac{1}{\frac{1}{y(0)} e^{-\alpha x} + \frac{b}{\alpha} \left[ 1 - e^{-\alpha x} \right]}$ , $x \geq 0$ $\to \alpha / b$

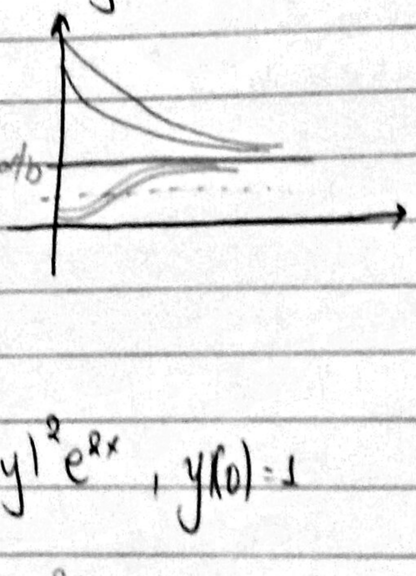
---

Η $y' = \alpha y - by^2 \to y' = y(\alpha - by)$

Για $y' = 0$: $y = 0$, $= \frac{\alpha}{b}$

κ' $y'' = \alpha - 2by$

$\boxed{\frac{\alpha}{2b}}$



**Άσκηση**: $y' + x + y + 1 = (x+y)^2 e^{2x}$ , $y(0) = 1$

Λύση

$y' + x + y + 1 = x^2 e^{2x} + 2xy e^{2x} + y^2 e^{2x}$

φαίνεται για Bernoulli, αλλά υπάρχουν όροι που δεν μας βολεύουν, οπότε θέτουμε $z = x + y \Rightarrow z' = 1 + y'$ κ' γίνεται: $\underbrace{z' + z = z^2 e^{2x}}_{\text{Bernoulli}}$ , $z(0) = 1$

# ● Εξίσωση Ricatti

Είναι της μορφής: $y' + \alpha(x)y + b(x)y^2 + d(x) = 0$

Αν η $y_1$: μερική λύση $\rightsquigarrow y = y_1 + \frac{1}{z} (\rightsquigarrow \dots)$

● **Άσκηση:** $y' = (x^2+y+1)(x^2+y-\frac{3}{2}) + 1 - 2x$ (1) $y = \lambda - x^2$

(Να βρεθεί λύσεις της εξίσωσης και δοκιμάστε να ~~λύσ~~ βρείτε λύσεις της μορφής: Δηλ. $(\exists\lambda)$ τ.ω να είναι λύση της εξίσωσης)

Λύση

$-2x = (x^2+\lambda-x^2+1)(x^2+\lambda-x^2-\frac{3}{2}) + 1 - 2x$

$\Rightarrow 0 = (\lambda+1)(\lambda-\frac{3}{2}) + 1 \Rightarrow \lambda = 1$, $\lambda = -\frac{1}{2}$ } βάζω μία μία τις τιμές και βρίσκω στην κάθε περίπτωση ένα σύνολο λύσεων

Για $\lambda = 1$ : Η μία λύση $y_1 = 1 - x^2$

Άρα (1): $y' = (x^2+y)^2 - \frac{3}{2}(x^2+y) + (x^2+y) - \frac{3}{2} + 1 - 2x$

$= x^4 + y^2 + 2x^2y - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y + x^2 + y - \frac{3}{2} + 1 - 2x \rightarrow$ είναι εξ Ricatti

Τέλος και βρίσκω: $y = 1 - x^2 + \frac{1}{z} \Rightarrow \dots$

Άρα για $\lambda = 1$ $\left\{\begin{array}{l} y_1 = 1 - x^2 \\ y = 1 - x^2 + \frac{1}{Ce^{-3/2x} + 2/3} \end{array}\right\} S_1$

Για $\lambda = -\frac{1}{2}$ : $\left\{\begin{array}{l} y_2 = -\frac{1}{2} - x^2 \\ y(x) = -\frac{1}{2} - x^2 + \frac{1}{C'e^{3/2x} + \frac{2}{3}} \end{array}\right\} S_2$

Για να δω τα δύο σύνολα είναι ίδια πρέπει $S_1 \subseteq S_2$ και $S_2 \subseteq S_1$, οπότε τα δύο σύνολα είναι ίδια για $c \neq c'$

Θέλω $c'$ τ.ω
- $1 - x^2 = -\frac{1}{2} - x^2 + \frac{1}{c'e^{3/2x} + 2/3} \Rightarrow \dots$ $c' = \dots$
- $1 - x^2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{c'e^{3/2x} + \frac{2}{3}}$

Ορίζω για $c = k$ σ' αυτή την περίπτωση για $c' = 0$ μας βγαίνει η $y_1 = 1 - x^2$ και βγαίνει για $c' = -\frac{4\alpha}{9c}$